

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 1 , Abgabe: 27.10.2006 , 8.00 Uhr

Übungstermine:

Gruppe 1:	Mo.	8.00 - 10.00 Uhr	SR 702	BK 33	Vitali Gretschko
Gruppe 2:	Mo.	10.00 - 12.00 Uhr	SR 1	BK 33	Vitali Gretschko
Gruppe 3:	Mo.	12.00 - 14.00 Uhr	SR 1	BK 35	Marzena Franek
Gruppe 4:	Mo.	14.00 - 16.00 Uhr	SR 1	BK 32	Arvind Sarin
Gruppe 5:	Mo.	16.00 - 18.00 Uhr	SR 1	BK 34	Christoph Brune
Gruppe 6:	Di.	10.00 - 12.00 Uhr	SR 1	BK 36	Herbert Podlogar

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Für

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

bestimme man die Lösung x der Gleichung $Ax = b$ mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens exakt "von Hand".

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Zeigen Sie: Das lineare System

$$x_i - \sum_{j=1}^{i-1} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

ist eindeutig lösbar. Sind $b_1, \dots, b_n \geq 0$, so sind auch $x_1, \dots, x_n \geq 0$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Berechnen Sie die LR-Zerlegung (ohne Permutation) der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Sei L_j die $n \times n$ -Elementarmatrix

$$L_j = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & -l_{j+1,j} & \ddots & & & & & \\ & & \vdots & & \ddots & & & & \\ 0 & & -l_{n,j} & & & \ddots & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{te-Zeile}$$

\uparrow
 $j\text{te-Spalte}$

Berechnen Sie L_j^{-1} und $L_j^{-1}L_k^{-1}$ für $j < k$ und bestätigen Sie damit die Formeln (3.4) und (3.5) aus der Vorlesung.

Übungen zur „Einführung in die Numerische Mathematik“

Übungsblatt 2 , Abgabe: 3.11.2006 , 8.00 Uhr

Aufgabe 5: (4 Punkte)Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 14 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 26 & 11 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die LR-Zerlegung $PA = LR$ mit Spaltenpivotsuche. Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der Zerlegung.**Aufgabe 6:** (4 Punkte)

Gegeben sei die Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & d_1 & & & 0 \\ c_2 & a_2 & d_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & a_{n-1} & d_{n-1} \\ 0 & & & c_n & a_n \end{pmatrix},$$

wobei sich A durch Gaußelimination in $A = LR$ zerlegen läßt.

- Welche Form haben die Matrizen L und R aus?
- Leiten Sie die Anzahl der Rechenoperationen her, die das Eliminationsverfahren (ohne Pivotisierung) zur Lösung eines Gleichungssystems $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^n$, benötigt.

Aufgabe 7: (4 Punkte)Zur Invertierung der $(n \times n)$ -Matrix A kann man das lineare Gleichungssystem $Ax^i = e_i$, $x^i \in \mathbb{R}^n$, ($i = 1, \dots, n$) lösen und erhält $A^{-1} = (x^1, \dots, x^n)$.

- Zeigen Sie, dass man dies in $n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ Rechenoperationen ausführen kann.
- Berechnen Sie mit diesem Verfahren die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8: (Programmieraufgabe, Abgabe: 10.11.2007, 4 Punkte)

Schreiben Sie ein Programm **gausselim**(**A**,**b**,**n**,**index**) zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren. Beim Aufruf enthalte **gausselim**(**A**,**b**,**n**,**index**) die $(n \times n)$ -Matrix **A** und den n -Vektor **b**. Nach Ablauf ist in der Matrix **A** die LR -Zerlegung gespeichert und der n -Vektor **index** enthält die durchgeführten Zeilenpermutationen. In dem Vektor **b** ist die Lösung x von $Ax = b$ gespeichert.

(a) Testen Sie das Programm an den Daten von Aufgabe 5.

(b) Berechnen Sie die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 10^{-l} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{für } l = 6, \dots, 20.$$

mit und ohne Spaltenpivotsuche.

(c) Die $(n \times n)$ -Matrix $H_n = (h_{ik})$, $h_{ik} = \frac{1}{i+k-1}$, $i, k = 1, \dots, n$, heißt *Hilbert-Matrix*. Sei $b_n := H_n x_0$ mit $x_0 = (1, 1, \dots, 1)^T$. Lösen Sie das Gleichungssystem $H_n x = b_n$ für $n = 5, 10, 15, 20$ mit und ohne Spaltenpivotsuche.

Bitte geben Sie die Programmieraufgabe in ausgedruckter Form ab und senden Sie sie zusätzlich per e-mail an Ihren Übungsgruppenleiter.

Übungen zur „Einführung in die Numerische Mathematik“

Übungsblatt 3 , Abgabe: 10.11.2006 , 8.00 Uhr

Aufgabe 9: (4 Punkte)Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung $A = LL^t$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 11 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 14 \end{pmatrix}$$

»von Hand«. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe von Matlab unter der Verwendung des Befehls `chol`.**Aufgabe 10:** (2+1+1+2 Punkte)

Gegeben sei die symmetrisch positiv definite Matrix

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B^t \\ B & C \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Somit existiert die Cholesky-Zerlegung $\mathcal{A} = LL^t$ mit $L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$, $L_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L_{21} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $L_{22} \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Zeigen Sie:

- a) Das Schur-Komplement $S := C - BA^{-1}B^t$ und der Block A sind symmetrisch positiv definit.

Hinweis: Betrachten Sie den Vektor $x = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ und wählen Sie v, w zur Berechnung von $x^t \mathcal{A} x$ geeignet.

- b) Wenn N eine reguläre Matrix ist, dann ist $M = N \cdot N^t$ symmetrisch positiv definit.

- c) Es gilt $S = L_{22} L_{22}^t$.

- d) Auch die Umkehrung von a) gilt:

Wenn A und S positiv definit sind, dann ist auch \mathcal{A} positiv definit.

Aufgabe 11: (Programmieraufgabe, Abgabe: 17.11.2007, 4 Punkte)Programmieren Sie das Cholesky-Verfahren zur Lösung des LGS $Ax = b$ in den drei Schritten

$$A = LL^t, \quad Lc = b, \quad L^t x = c.$$

Testen Sie das Programm an der Matrix A aus Aufgabe 9 mit $b = (-10, 11, 49, 63)^t$.

Anwendung: Gegeben seien eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b \in \mathbb{R}$, und Werte $y_a, y_b \in \mathbb{R}$. Gesucht ist eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die das Randwertproblem (RWP)

$$\ddot{y}(t) = f(t), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b,$$

löst. Mit einer Schrittweite $h > 0$ werden die Ableitungen approximiert durch

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &\approx \frac{1}{h} (y(t+h) - y(t)), \\ \ddot{y}(t) &\approx \frac{1}{h} (\dot{y}(t) - \dot{y}(t-h)) \approx \frac{1}{h^2} (y(t+h) - 2y(t) + y(t-h)). \end{aligned}$$

Die Diskretisierung des Zeitintervalls

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = b, \quad t_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n, n+1,$$

mit der Schrittweite $h = (b - a)/(n + 1)$ liefert die folgende Approximation des RWP:

$$\frac{1}{h^2} (y(t_i + h) - 2y(t_i) + y(t_i - h)) \approx f(t_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad y(t_0) = a, \quad y(t_{n+1}) = b.$$

Überlegen Sie, dass man eine geeignete Approximation y_i von $y(t_i)$, $i = 1, \dots, n$, erhält durch die Lösung des LGS:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h^2 f(t_1) + y_a \\ -h^2 f(t_2) \\ \vdots \\ -h^2 f(t_{n-1}) \\ -h^2 f(t_n) + y_b \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie mit Hilfe des Cholesky-Verfahrens das obige RWP auf dem Intervall $[a, b] = [0, 10]$ für

- (a) $f(t) \equiv 1$, $y_a = 0$, $y_b = 50$ mit $n = 9$,
 (b) $f(t) = 3t^2$, $y_a = 0$, $y_b = 2500$ mit $n = 9, 19, 49, 99$.

Berechnen Sie jeweils den absoluten Fehler der numerischen Lösung y_i , $i = 1, \dots, n$, im Vergleich zur exakten Lösung $y(t) = \frac{1}{2}t^2$ bzw. $y(t) = \frac{1}{4}t^4$.

Übungen zur „Einführung in die Numerische Mathematik“

Übungsblatt 4 , Abgabe: 17.11.2006 , 8.00 Uhr

Aufgabe 12: (2+2 Punkte)Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2(x_2 - x_3)^2$.

- (a) Bestimmen Sie die Verstärkungsfaktoren $k_{1i}(x)$, $i = 1, 2, 3$.
- (b) Sei $\tilde{x} = x + \Delta x$ eine Näherung von $x = (2.00, 1.00, 0.98)$ mit $|\Delta x_i| \leq 0.005$, $i = 1, 2, 3$. Schätzen Sie mit Hilfe der Verstärkungsfaktoren den relativen Fehler von f ab.

Aufgabe 13: (2+3 Punkte)

- (a) Wie kann man die Maschinengenauigkeit eines Rechners experimentell bestimmen? Testen Sie Ihr Verfahren, indem Sie die Maschinengenauigkeit von Matlab bestimmen. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis.
- (b) Die folgenden Ausdrücke berechnen theoretisch paarweise denselben Wert. Für welche Argumente sind die verschiedenen Ausdrücke rundungsfehleranfällig?

$$\begin{aligned}\sin x - \sin y &= 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}, \\ \log x - \log y &= \log \frac{x}{y}, \\ 1 - \cos x &= 2 \sin^2 \frac{x}{2}.\end{aligned}$$

Können Sie Beispiele angeben, in denen unterschiedliche Ergebnisse für die Ausdrücke berechnet werden?

Hinweis: Die Maschinengenauigkeit in Matlab ist mit der Variable `eps` gegeben. Lassen Sie sich die Ergebnisse mit Hilfe des Befehls `format long` mit gesamter Mantissenlänge ausgeben. Geben Sie Aufgabe 13 a) bitte per E-Mail an Ihren Übungsgruppenleiter ab.

Aufgabe 14: (2+2 Punkte)

- a) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_0 \neq 0$. Zeigen Sie: In jeder Maschinearithmetik gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(x_0 \boxplus h) \boxminus f(x_0)}{h} = 0.$$

- b) Betrachten Sie die Funktion

$$\epsilon(h) := \left| \frac{f(x_0 \boxplus h) \boxminus f(x_0)}{h} \boxminus f'(x_0) \right|$$

für $f(x) = \cos(x)$ und $x_0 = 1$. Erklären Sie, warum ϵ für $h \rightarrow 0$ zunächst abnimmt und dann größer wird. Was muss man tun, um den Unterschied zwischen der Ableitung und dem numerischen Differenzenquotienten möglichst klein zu halten (ohne Beweis)?

Übungen zur „Einführung in die Numerische Mathematik“

Übungsblatt 5 , Abgabe: 24.11.2006 , 8.00 Uhr

Aufgabe 15: (2+2 Punkte)

(a) Man bestimme die der Norm

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

zugeordnete Matrixnorm.

(b) Seien A und T die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad d_1, d_2 > 0.$$

Für welche Werte d_1, d_2 wird die *transformierte* Norm $\|A\|_T = \|TAT^{-1}\|_\infty$ minimiert? Vergleichen Sie diese mit $\|A\|_\infty$.**Aufgabe 16:** (2+2+1+1 Punkte)Mit $\|\cdot\|$ werde eine Vektornorm des \mathbb{R}^n und die zugeordnete Matrix-Norm bezeichnet. Beweisen Sie:

- (a) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$,
- (b) $\text{cond}(AB) \leq \text{cond}(A)\text{cond}(B)$,
- (c) $\text{cond}_2(Q) = 1$, wenn Q orthogonal,
- (d) $\text{cond}_2(QA) = \text{cond}_2(A)$, wenn Q orthogonal.

Aufgabe 17: (2+2 Punkte)

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -12 & 7 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 19 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie die Kondition $\text{cond}(A)$ für die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_F$.
- (b) Für die Näherungen \tilde{A} , \tilde{b} , \tilde{x} von A , b , x gelte

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \quad \text{mit} \quad \|\tilde{A} - A\|_\infty \leq 0.013.$$

Wie groß darf der Fehler $\|\tilde{b} - b\|_\infty$ höchstens sein, damit $\|\tilde{x} - x\|_\infty \leq 0.5$ gilt?

Aufgabe 18: (Programmieraufgabe: Abgabe Freitag, 1.12.2006, 4 Punkte)
Schreiben Sie ein Programm zur Berechnung von

$$y_n = \frac{1}{3^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

unter Verwendung der Formel

$$y_n = \frac{10}{3}y_{n-1} - y_{n-2}, \quad n = 2, 3, 4, \dots, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{1}{3}. \quad (2)$$

- (a) Beweisen Sie, dass (2) eine Formel zur Berechnung von (1) ist.
- (b) Berechnen Sie mit dem Programm y_n nach (2) und den relativen Fehler $\epsilon_n = 1 - 3^n y_n$ von y_n für alle $1 \leq n \leq 25$.
- (c) Wieso ist die Formel (2) anfällig für Rundungsfehler? Programmieren Sie eine *stabile* Formel $y_n = ay_{n-1} + by_{n-2}$ mit $a \neq 0$, $b \neq 0$ in dem Sinne, dass Rundungsfehler keinen wesentlichen Einfluss haben. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von (b).

Hinweise:

- (1) Rechnen Sie hier mit doppelter Genauigkeit (z.B. *double* oder *double precision*). Bei Matlab ist dies automatisch gegeben.
- (2) In Matlab können Felder nicht mit dem Index 0 beginnen.

Geben Sie die Programmieraufgabe bitte als Ausdruck und per Email bei Ihrem Übungsgruppenleiter ab.

Übungen zur „Einführung in die Numerische Mathematik“

Übungsblatt 6 , Abgabe: 1.12.2006 , 8.00 Uhr

Aufgabe 19: (3+1 Punkte)Die (n, n) -Matrix A sei diagonaldominant, d.h. es gelte $|a_{ii}| > \sum_{k \neq i} |a_{ik}|$ für $i = 1, \dots, n$.

(a) Beweisen Sie die Abschätzung

$$\|Ax\|_\infty \geq c\|x\|_\infty \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \quad c := \min_{i=1, \dots, n} \left(|a_{ii}| - \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \right)$$

und folgern Sie daraus die Abschätzung

$$\text{cond}_\infty(A) \leq \|A\|_\infty / c.$$

Hinweis: Betrachten Sie $\|x\|_\infty = |x_r|$ und $\|Ax\|_\infty \geq |(Ax)_r|$.

(b) Bei der Spline-Interpolation begegnet man der Tridiagonal-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & & & \\ \alpha_2 & 1 & \beta_2 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & & \alpha_n & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \alpha_i, \beta_i > 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \beta_1, \alpha_n \leq 1/2, \\ \alpha_i + \beta_i = 1/2, \quad i = 2, \dots, n-1. \end{array}$$

Geben Sie eine Abschätzung für $\text{cond}_\infty(A)$ an.**Aufgabe 20:** (4 Punkte)Berechnen Sie die Lösung $x_0 \in \mathbb{R}$ des linearen Ausgleichsproblems

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \|y - Ax\|_2^2, \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) mit den Normalgleichungen,

(b) mit dem QR -Verfahren.Bestimmen Sie in beiden Fällen das Residuum $\|y - Ax_0\|_2$ und skizzieren Sie die Lösung graphisch.

Aufgabe 21: (4 Punkte)

Berechnen Sie die kleinste-Quadrate-Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix},$$

indem Sie das Householder-Verfahren »von Hand« durchführen, um die Matrizen Q und R zu bestimmen und das Gleichungssystem $Rx = Q^*b$ zu lösen. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Matlab. Schauen Sie sich dazu die Hilfe zu den Befehlen `qr`, `pinv` und zu dem arithmetischen Operator `\` an.

Aufgabe 22: (4 Punkte)

Für die Größen α und β wird ein linearer Zusammenhang $y = \alpha + \beta t$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vermutet. In einem Experiment werden für die Punkte t_i die Werte y_i , $i = 1, \dots, 7$ gemessen:

t_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	1.2	1.9	3.1	4.2	5.0	6.5	6.8

Stellen Sie ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ auf und bestimmen Sie die Lösung des linearen Ausgleichsproblems mit Matlab. Plotten Sie die Lösung und die Messwerte zusammen in einer *Figure*.

Hinweis: Mit den Befehlen `hold on` und `hold off` können mehrere Funktionen, Messwerte etc. in einer *Figure* geplottet werden. Unter dem Begriff *linespec* finden Sie in der Matlab-Hilfe einige Möglichkeiten, die Funktionen in einer *Figure* unterschiedlich zu gestalten.

Übungen zur „Einführung in die Numerische Mathematik“

Übungsblatt 7 , Abgabe: 15.12.2006 , 8.00 Uhr

Aufgabe 23: (4 Punkte)Für die Messwerte (t_i, y_i) aus der folgenden Tabelle

t_i	0.21	0.62	1.19	2.01	2.42	4.18
y_i	2.23	2.49	4.22	6.13	6.95	1.01

wird ein kubischer Zusammenhang $y(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ vermutet.

- (a) Stellen Sie das zugehörige Gleichungssystem $Ax = b$ mit $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ auf.
- (b) Bestimmen Sie die Lösung des Ausgleichsproblems mit Matlab, indem Sie die QR -Faktorisierung von A berechnen.
- (c) Geben Sie die Norm des Fehlers $\|Ax - b\|_2$ an.
- (d) Plotten Sie die Lösung und die Messwerte zusammen in einer *Figure* für $t \in [-1, 5]$.

Aufgabe 24: (2 Punkte)

Eine Alternative in der QR -Zerlegung zur Householdermethode ist die *Givens-Rotation*. Sei φ ein Rotationswinkel. Dann heißt die unitäre (n, n) -Matrix G *Givens-Rotation um den Winkel φ in der Ebene (i, k)* , falls G bis auf die Elemente

$$\begin{aligned} G_{i,i} &= \cos(\varphi) \\ G_{i,k} &= \sin(\varphi) \\ G_{k,i} &= -\sin(\varphi) \\ G_{k,k} &= \cos(\varphi) \end{aligned}$$

für ein Paar (i, k) mit $1 \leq i, k \leq n$ mit der Einheitsmatrix übereinstimmt. Sei A eine (n, m) -Hessenbergmatrix mit $n \geq m$, d.h. A erfüllt $A_{i,j} = 0$ für $i > j + 1$. Bestimmen Sie φ so, dass für die Givens-Rotation G um den Winkel φ in der $(1, 2)$ -Ebene gilt, dass GA in der ersten Spalte unterhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen als Einträge hat.

Aufgabe 25: (4 Punkte)

Ein Versuch mit m Messungen führt auf ein lineares Ausgleichsproblem mit der (m, n) -Matrix A . Die Matrix A liege in QR -Zerlegung $A = QR$ vor. Nun werde ein weiterer

Messwert (an erster Stelle) hinzugeführt. Geben Sie Formeln zur Berechnung von $\tilde{Q}\tilde{R} = \tilde{A}$ mit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \omega^T \\ A \end{pmatrix}, \quad \omega \in \mathbb{R}^n$$

unter Benutzung der QR -Zerlegung von A an.

Aufgabe 26: (4 Punkte)

Durch die Messpunkte

$$\begin{array}{c|ccc} t_i & \frac{1}{e} & 1 & e \\ \hline y_i & -1 & e & 2 + e^2 \end{array}$$

soll eine Ausgleichsfunktion $y(t) = \alpha t + \beta \ln(t)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, gelegt werden. Formulieren Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem und berechnen Sie die optimalen Parameter α, β .

Hinweis: Nach Aufstellung der Normalgleichungen können die Parameter α, β durch »scharfes Hinsehen« bestimmt werden.

Übungen zur „Einführung in die Numerische Mathematik“

Übungsblatt 8 , Abgabe: 22.12.2006 , 8.00 Uhr

Aufgabe 27: (4 Punkte)

Ein vereinfachtes Modell zur Populationsentwicklung in einem begrenzten Lebensraum ist durch die *Logistische Gleichung*

$$x_{k+1} = \lambda x_k(1 - x_k), \quad k > 0 \quad (1)$$

gegeben. Hierbei ist x_0 die Anfangspopulation, x_k die Größe der Population zum Zeitpunkt k und λ ein für jede Iteration fester Umweltparameter.

Auf der Internetseite zu den Übungen finden Sie ein Matlab-Programm `logistischeGleichung.m`, das die Populationsentwicklung bei zufälliger Anfangspopulation graphisch darstellt. Zeile j im ausgegeben Bild steht für einen Wert λ_j im Intervall $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ (angegeben auf der y -Achse), welches standardmäßig auf $[0, 4]$ eingestellt ist. Für jedes λ aus dem Intervall werden die Folgenglieder x_k ausgerechnet und als Punkte (x_k, λ) in der Graphik in jeder Iteration k eingetragen. Das Programm läuft mit einer Endlosschleife, die Iteration (1) bricht zunächst nicht ab, d.h. mit der Zeit konvergiert die Iteration in einigen Bereichen. Falls in einer Zeile nach einiger Zeit nur ein Punkt steht, so konvergiert die Folge vermutlich für das zugehörige λ .

Sie können durch Drücken der Tasten `x`, `h`, `n`, `L`, `Esc` das Programm wie folgt beeinflussen:

- L Eingabe eines neuen Intervalls $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ in der Matlab-Notation λ_{\min} :
Schrittweite : λ_{\max}
- n neue Wahl des Startvektors x für alle λ durch einen Zufallsgenerator
- x neue Plot-Grenzen für x in Matlab-Notation $[x_0, x_1]$ festlegen
- h Wechsel zwischen einem `hold on` und einem `hold off`-Plot
- Esc Programm stoppt

- (a) Machen Sie sich mit dem Programm vertraut. Beachten Sie einige interessante Bereiche der Graphik durch die Wahl eines neuen Intervalls $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ genauer (z.B. $[2.8, 3.2]$) Welche unterschiedlichen Arten des asymptotischen Verhaltens lassen sich beobachten?
- (b) Zeigen Sie, dass die Folge für $\lambda > 3$ zunächst stabil zwischen zwei Häufungspunkten wechselt. Geben Sie den exakten Wert von λ an, bei dem der Wechsel von zwei Häufungspunkten auf vier Häufungspunkte stattfindet.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f(f(x))$.

Aufgabe 28: (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass das Newton-Verfahren zur Funktion

$$f(x) = x^n - a, \quad a > 0, \quad n \geq 2,$$

für jeden Startwert $x_0 > 0$ gegen die positive Nullstelle $\bar{x} = a^{1/n}$ von f konvergiert. Überlegen Sie dazu, dass gilt:

(a) $x_k \geq a^{1/n} \quad \forall \quad k \geq 1,$

(b) $x_{k+1} \leq x_k \quad \forall \quad k \geq 1.$

Hinweis: Betrachten Sie die Newton'sche Iterationsfunktion und bestimmen Sie das Minimum dieser Funktion.

Aufgabe 29: (3 Punkte)

Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion mit $|g'(x)| \leq 0.5$ für $x \in \mathbb{R}$. Der Fixpunkt \bar{x} von g soll mit einem absoluten Fehler kleiner gleich $0.5 \cdot 10^{-6}$ berechnet werden. Die Fixpunktiteration $x_{k+1} = g(x_k)$ ergibt

$$x_4 = 0.51495 \quad \text{und} \quad x_5 = 0.51519.$$

Wie viele zusätzliche Iterationen muss man ausführen, um die gewünschte Genauigkeit zu erreichen?

Aufgabe 30: (4 Punkte)

Sei $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Abbildung mit

$$g(x_1, x_2) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2x_2 & - & x_1x_2 & + & 1 \\ x_1^2 & - & x_2 & + & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung g auf der Menge $D = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$ genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in D$ besitzt.
- (b) Berechnen Sie $x^1 = g(x^0)$ mit $x^0 = (0.5, 0.5)^T$. Wieviele Iterationen k benötigt man, um die Genauigkeit $\|\bar{x} - x^k\|_\infty \leq 0.01$ für den Fixpunkt $\bar{x} \in D$ zu erzielen?

Übungen zur „Einführung in die Numerische Mathematik“

Übungsblatt 9 , Abgabe: 12.01.2007 , 8.00 Uhr

Aufgabe 31: (3 Punkte)

Sei A eine (n, n) -Matrix. Das Eigenwertproblem $Ax = \lambda x$ ist äquivalent zu dem nicht-linearen Gleichungssystem

$$Ax - \lambda x = 0, \quad \|x\|_2^2 - 1 = 0.$$

Stellen Sie das zugehörige Newton-Verfahren auf.

Aufgabe 32: (3+2 Punkte)

Sei A eine positiv definite Matrix. Dann gibt es genau eine positive definite Matrix X mit $X^2 = A$. Man schreibt $X = A^{1/2}$. Zur Berechnung von X löse man das Gleichungssystem $F(X) = 0$ mit $F(X) = X^2 - A$.

- (a) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren für $F(X) = 0$ die Form

$$X_{k+1}X_k + X_kX_{k+1} = A + X_k^2$$

hat.

- (b) Berechnen Sie eine Approximation X_1 für $\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}^{1/2}$ durch einen Schritt des Newton-Verfahrens mit der Startnäherung $X_0 = I$ und zeigen Sie, dass

$$\|X_1^2 - A\|_\infty \leq \frac{1}{16}.$$

Aufgabe 33: (Programmieraufgabe, Abgabe: 19.01.2007, 8 Punkte)

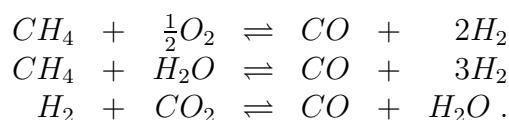
Programmieren Sie das n -dimensionale Newton-Verfahren zur Berechnung der Nullstelle \bar{x} einer C^2 -Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Lösen Sie die folgenden nicht-linearen Gleichungssysteme:

- (a) Für die komplexe Variable $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, führt die komplexe Fixpunktgleichung $z = e^z$ auf die äquivalenten reellen Gleichungen

$$e^x \cos y - x = 0, \quad e^x \sin y - y = 0.$$

Startpunkt: $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Finden Sie zwei weitere Lösungen.

- (b) Bei der Gewinnung von Wasserstoff aus Methan wird die Gleichgewichtslösung des folgenden chemischen Systems gesucht:



Dies führt auf das Gleichungssystem $f(x_1, \dots, x_7) = 0$ für die Konzentration $x \in \mathbb{R}^7$ mit

$$f(x_1, \dots, x_7) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{x_6}{x_7} \\ x_3 + x_4 + 2x_5 - \frac{2}{x_7} \\ x_1 + x_2 + x_5 - \frac{1}{x_7} \\ -28837x_1 - 139009x_2 - 78213x_3 + 18927x_4 \\ \quad + 8427x_5 + \frac{13492}{x_7} - 10690\frac{x_6}{x_7} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 1 \\ 400x_1x_4^3 - 1.7837 \cdot 10^5 x_3x_5 \\ x_1x_3 - 2.6058x_2x_4 \end{pmatrix}$$

Nehmen Sie die Startdaten: $x_1 = x_4 = x_6 = 0.5$, $x_2 = x_3 = x_5 = 0$, $x_7 = 2.0$.

(c) Das Minimum der *Rosenbrock*-Funktion

$$h(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$$

ist offensichtlich der Punkt $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$. Starten Sie die Newton-Iteration für die Gleichung $f(x, y) := \nabla h(x, y) = 0$ im Punkt $(x_0, y_0) = (-0.5, 0.5)$. Prüfen Sie die Hesse-Matrix von $h(x, y)$ auf Positiv-Definitheit.

Hinweise: Setzen Sie für alle Teilaufgaben das Abbruchkriterium $\|f(x)\|_2 \leq 10^{-10}$. Approximieren Sie die Jacobi-Matrix $f'(x^k) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^k) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ durch den zentralen Differenzenquotienten

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^k) \approx \frac{f_i(x^k + he_j) - f_i(x^k - he_j)}{2h}, \quad h > 0, \quad i, j = 1, \dots, n$$

mit der Schrittweite h und dem j -ten Einheitsvektor $e_j \in \mathbb{R}^n$. Beachten Sie ggf. dazu die Programmierhilfe.

Benutzen Sie das Gaußeliminationsverfahren aus Aufgabe 8 oder eine geeignete Matlab-Routine zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$f'(x^k)d^k = -f(x^k), \quad x^{k+1} = x^k + d^k.$$

Wir wünschen allen Teilnehmern ein

Frohes Weihnachtsfest

und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Übungen zur „Einführung in die Numerische Mathematik“Übungsblatt 10 , Abgabe: 19.01.2007 , 8.00 Uhr

Aufgabe 34: (4 Punkte)

Zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 9 & 0.6 \\ 0.6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

führe man ausgehend von $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ zwei Schritte des Gesamt- und Einzelschrittverfahrens durch. Berechnen Sie die Anzahl der Iterationen k , die für die Genauigkeit $\|\bar{x} - x^{(k)}\|_\infty \leq 10^{-6}$ benötigt wird.

Aufgabe 35: (4 Punkte)

Betrachten Sie zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

das Gesamtschrittverfahren $x^{(k+1)} = C_G x^{(k)} + d$ mit $C_G = -D^{-1}(L + R)$, $d = D^{-1}b$.

- Überlegen Sie, dass das starke Zeilensummenkriterium nicht erfüllt ist. Zeigen Sie, dass das Gesamtschrittverfahren konvergent ist. Berechnen Sie dazu $\rho(C_G)$.
- Berechnen Sie $x^{(1)}$ mit $x^{(0)} = (0, 1, 1)^T$.

Aufgabe 36: (4 Punkte)

Sei A eine (m, n) -Matrix mit $n \leq m$ und $\text{rang}(A) = n$. Sei $0 < r < \frac{2}{\sigma_1^2}$, wobei σ_1^2 der größte Eigenwert von $A^T A$ ist.

Zeigen Sie: Die Iteration

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - rA^T(Ax^{(k)} - y)$$

konvergiert für jede Wahl von $x^{(0)}$, $y \in \mathbb{R}^n$ gegen eine Lösung des linearen Ausgleichsproblems

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|y - Ax\|_2.$$

Aufgabe 37: (4 Punkte)

Seien $C_G = -D^{-1}(L + R)$, $C_E = -(L + D)^{-1}R$ die Matrizen des Gesamt- bzw. Einzelschrittverfahrens. Man zeige: Falls für die Matrixelemente a_{ik} , $i, k = 1, \dots, n$ der (n, n) -Matrix $A = L + D + R$ die Ungleichung

$$\sum_{k \neq i} |a_{ik}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

erfüllt ist, so gilt

$$\|C_E\|_\infty \leq \|C_G\|_\infty < 1.$$

Hinweis: Für $x \in \mathbb{R}^n$, $y := C_E x$ zeige man induktiv

$$|y_k| \leq \|C_G\|_\infty \|x\|_\infty, \quad k = 1, \dots, n.$$

Übungen zur „Einführung in die Numerische Mathematik“Übungsblatt 11 , Abgabe: 26.01.2007 , 8.00 Uhr

Aufgabe 38: (2+2+3 Punkte)Sei $p \in \Pi_3$ das Polynom, das die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ an den Stützpunkten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 9$ interpoliert.

- Bestimmen Sie p mit der Formel von Lagrange.
- Bestimmen Sie p mit der Newtonschen Interpolationsformel.
- Das Polynom $p_2 \in \Pi_2$ interpoliere $f(x) = \sqrt{x}$ in den Knoten 1, 2, 3. Geben Sie eine Abschätzung für den Interpolationsfehler im Intervall $[1, 3]$ an.

Aufgabe 39: (3 Punkte)Sei $p \in \prod_2$ das Interpolationspolynom zu gegebenen Stützwerten

x_j	-1	0	2
f_j	-2	-3	1

mit $p(x_j) = f_j$, $j = 0, 1, 2$. Berechnen Sie mit dem Algorithmus von Neville zu $x = 1$ den Wert $p(x)$.**Aufgabe 40:** (5 Punkte)Der Streckenzug $s(x)$ interpoliere $f(x) = \ln(x)$ in den äquidistanten Knoten $x_i = 2 + ih$, $h = 1/n$, $i = 0, \dots, n$, d.h.

$$s(x) = (1 - t) \cdot \ln(x_i) + t \cdot \ln(x_{i+1}), \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad t = (x - x_i)/h.$$

Bestimmen Sie ein möglichst kleines n so, dass

$$\max_{2 \leq x \leq 3} |s(x) - \ln(x)| \leq 10^{-3}.$$

Hinweis: Restgliedformel für $x_i \leq x \leq x_{i+1}$.**Die Klausur findet am Freitag, den 2. Februar 2007, von 14:00 - 17:00 Uhr in den Hörsälen M1 und M2 statt.****Bitte bringen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zur Klausur mit. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.**

Programmierhilfe

Funktionen als Argumente von Funktionen in Matlab – Verwendung von Zeigern

Bisher wurde im Matlabkurs nur der herkömmliche Funktionsaufruf besprochen. In einem gesonderten M-File wird eine Funktion gespeichert, welche dann in einem Hauptprogramm ausgeführt werden kann. Die Funktion enthielt Variablen als Argumente.

Es ist auch möglich, Funktionen zu programmieren, deren Argumente andere Funktionen sind. Dies kann zum Beispiel nötig sein, wenn eine numerische Approximation einer Ableitung programmieren werden soll. Es seien mehrere Funktionen, z.B. $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = x^2$, $f_3 = \cos(x)$ gegeben und wir wollen die Ableitungen dieser Funktionen in einem festen Punkt $x = 1$ mit Hilfe der Approximation

$$f'(x) \approx D^+ f(x) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad h > 0 \quad (1)$$

für eine fest vorgegebene Schrittweite h berechnen. Dann könnte man für jede der Funktionen f_1, f_2, f_3 den Wert $D^+ f(x)$ berechnen:

```
x=1;
h=0.001;
Df_1 = (sin(x+h)-sin(x))/h;
Df_2 = ((x+h)^2-x^2)/h;
Df_3 = (cos(x+h)-cos(x))/h;
```

Übersichtlicher ist es, wenn man eine Routine **Ableitung** programmiert, die eine vorgegebene Funktion f , einen Funktionswert x und eine Schrittweite h einliest und damit die näherungsweise Ableitung $f'(x)$ nach Gleichung (1) berechnet. Die Routine müsste dann nur einmal programmiert werden und könnte für alle Funktionen genutzt werden. Dies bedeutet aber, dass man die Funktion f als Argument der Funktion **Ableitung** übergeben muss. Das kann Matlab mit Hilfe von *Zeigern* realisieren:

Zunächst muss die Funktion f programmiert werden (im Beispiel betrachten wir nur die oben genannte Funktion f_1), welche eine Zahl x einliest und den Funktionswert $f(x)$ zurück gibt:

```
function y = f(x)
y = sin(x);
```

Diese speichern wir als M-File unter dem Namen **f.m**. Dann wird eine Funktion **Ableitung** geschrieben, die wie gefordert f , x und h einliest und die Ableitung von f im Punkt x approximiert. In dieser Funktion kann das Argument f wie eine Variable normal eingesetzt werden:

```
function Df = Ableitung(f,x,h)
% Diese Routine berechnet die Ableitung einer Funktion f im Punkt x
```

```
% mit Hilfe von Gleichung (1). Dabei ist f ein Zeiger auf diese Funktion
% (was jedoch an der herkoemmlichen Syntax hier nichts aendert).
```

```
Df = (f(x+h)-f(x))/h;
```

Die Routine wird als M-File `Ableitung.m` abgespeichert. Nun muss noch das Hauptprogramm `Beispiel.m` geschrieben werden, in dem die Funktionen `f` und `Ableitung` aufgerufen werden. Bei dem Funktionsaufruf `Ableitung` im Hauptprogramm muss allerdings berücksichtigt werden, dass eines der zu übergebenden Argumente eine Funktion ist. Es wird ein *Zeiger* auf die Funktion (handle in Matlab) übergeben. Den Zeiger erhalten wir, indem vor dem Funktionsnamen das Zeichen `@` angefügt wird.

```
% Programm, welches fuer gegebene Werte x eine Funktion f aufruft und dann
% mit Hilfe der Funktion Ableitung.m die Ableitungen von f in diesen x
% bestimmt
```

```
% Festlegung der Werte x aus dem Intervall [0,4]
h=0.02;
x = 0:h:4;
% Berechne f(x) mit der Funktion f.m:
y = f(x);
% Berechne die Ableitung von f auf dem Intervall [0,4]
Dy = Ableitung(@f,x,h);
```

```
% plot der Funktion und der Ableitung:
figure(1)
plot(x,y,'k')
hold on
plot(x,Dy,'r')
hold off
legend('f(x)', 'df(x)/dx', 1)
```

Wird die Funktion `f` als Argument der Funktion `Ableitung` aufgerufen, so setzen wir das Zeichen `@` davor. Die Routine `Ableitung` kann nun zur näherungsweise Ableitung aller differenzierbaren Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ verwendet werden.

Anmerkung: Dies ist nur eine Erläuterung des Programmierens von Funktionen, die als Argumente wiederum Funktionen enthalten. Das hier vorgestellte Beispiel ist nicht die Routine zur Berechnung der Jacobi-Matrix $f'(x^k) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^k) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ durch den zentralen Differenzenquotienten, welche in Aufgabe 33 gebraucht wird. Die Funktionen und das Hauptprogramm aus diesem Beispiel stehen zum Download auf der Webseite zu den Übungen zur Verfügung.

Der Matlab-Kurs findet nach den Ferien erstmalig wieder am 16.01. bzw. 17.01. statt.